EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* ….073**

Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

În sistemul cartezian de coordonate *xOy*, se consideră punctele $A(3,6)$, $B(2,4)$, $C(5,5)$.

(4p) **a)** Să se calculeze suma de numere complexe $i^{1997}+i^{2002}+i^{2007}+i^{2012}$.

(4p) **b)** Să se calculeze lungimea segmentului $[AC]$.

(4p) **c)** Să se calculeze aria triunghiului *ABC*.

(4p) **d)** Să se calculeze $\sin\left(\widehat{CBA}\right)$.

(2p) **e)** Să se determine $m,n\in\mathbf{R}$ astfel încât $x+my+n=0$ să reprezinte ecuația dreptei *BC*.

(2p) **f)** Să se determine coordonatele centrului de greutate al triunghiului ABC.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{3x}-8^{5}=0$.

(3p) **b)** Se consideră progresia aritmetică $2, 7, 12, 17, \ldots$. Să se determine termenul de rang 400 al progresiei.

(3p) **c)** Să se determine câte numere naturale de 3 cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $\{0, 1, 2, 5\}$.

(3p) **d)** Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=2007x-2006$. Să se calculeze $(f\circ f)(1)$.

(3p) **e)** Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale ecuația $n!=24$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=\ln\left(x^2+2007\right)$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x),\ x\in\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

(3p) **c)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

(3p) **d)** Să se determine coordonatele punctului de extrem local al funcției f.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{2007}f(0)}{2007-n^{2007}}$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi mulţimile $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \ a, b \in \mathbf{Z} \right\}$,

$G_k = \{A \in G \mid |\det(A)| = k, k \in \mathbf{N}\}$.

(4p) **a)** Să se arate că $O_2 \in G$ şi $I_2 \in G$.

(4p) **b)** Să se arate că dacă $A, B \in G$, atunci $AB \in G$.

(4p) **c)** Să se arate că $\det(A) \cdot \det(B) = \det(A \cdot B)$ pentru orice $A, B \in G$.

(2p) **d)** Să se arate că pentru orice $x \in \mathbf{R}$ este adevărată egalitatea $(x+1)^2 - (x-1)^2 = 4x$.

(2p) **e)** Să se arate că, dacă $A \in G_1$, atunci A este inversabilă.

(2p) **f)** Să se arate că, dacă $A \in G$ este inversabilă şi $A^{-1} \in G$, atunci $A \in G_1$.

(2p) **g)** Să se arate că pentru orice $k \in \mathbf{N}$, $G_{4k} \neq \emptyset$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcţiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ şi

$g : A \to \mathbf{R}$, $g(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x-3}$, unde $A = \mathbf{R} \setminus \{1,2,3\}$.

(4p) **a)** Să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuaţia $f(x) = 0$.

(4p) **b)** Să se arate că $g'(x) < 0$, $\forall x \in A$.

(4p) **c)** Să se arate că $g(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$, $\forall x \in A$.

(2p) **d)** Să se arate că $(f'(x))^2 > f(x) \cdot f''(x)$, $\forall x \in A$.

(2p) **e)** Să se determine numărul de asimptote verticale ale graficului funcţiei g.

(2p) **f)** Să se calculeze $\int_4^5 (g(x+1) - g(x))\, dx$.

(2p) **g)** Utilizând eventual rezultatul de la punctul **c)** să se arate că ecuaţia $f(x) - a \cdot f'(x) = 0$ are exact 3 soluţii reale şi distincte, $\forall a \in \mathbf{R}$.